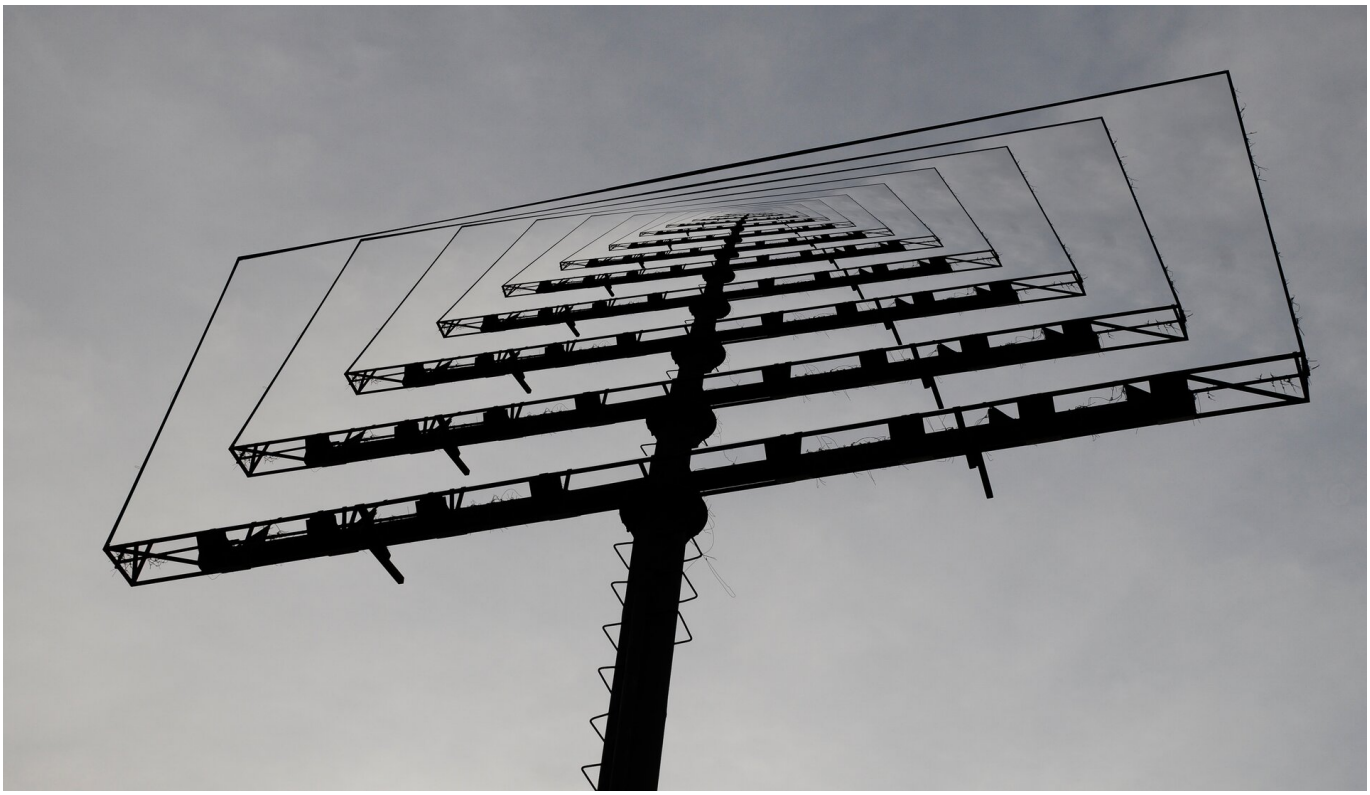
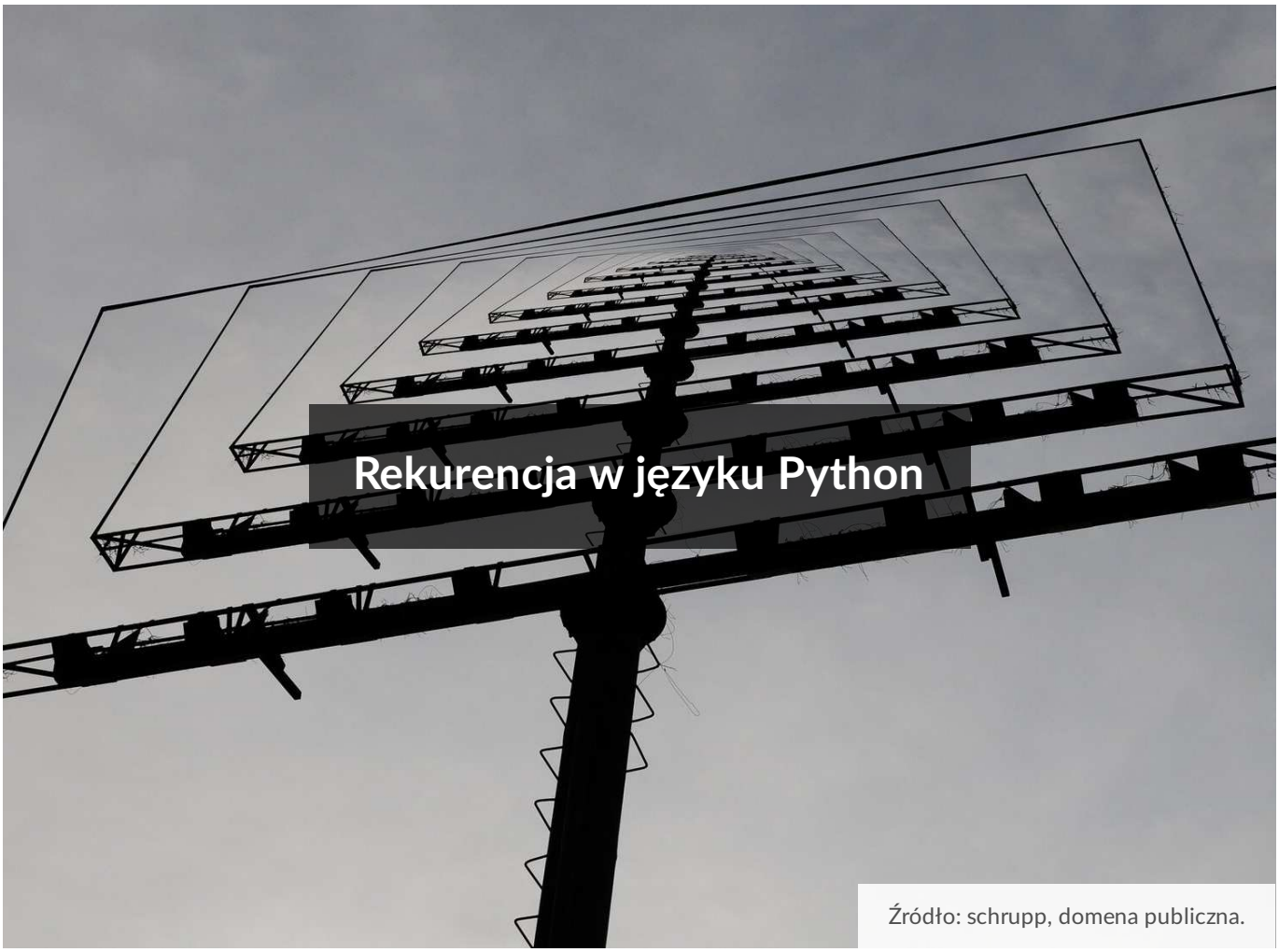


Rekurencja w języku Python

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: schrupp, domena publiczna.

Rekurencja jest metodą rozwiązywania problemów, która korzysta z rozwiązań innych problemów. Jej wyjątkowość polega na tym, że za „innymi problemami" kryje się problem właściwy, ale rozwiązywany dla podproblemu, który powstał w wyniku podziału problemu wyjściowego.

W e-materiale Rekurencja przedstawiliśmy podstawowe informacje dotyczące omawianego zagadnienia. Kolejnym krokiem będzie implementacja w wybranym języku programowania. Ten e-materiał poświęcony jest implementacji algorytmów rekurencyjnych w języku Python.

Więcej przykładów, ćwiczeń i rozwiązań znajdziesz w:

- Rekurencja – ćwiczenia,
- Rekurencja w zadaniach.

Ciekawi cię, jak wyglądają implementacje w innych językach programowania? Możesz się z nimi zapoznać w dwóch pozostałych lekcjach z tej serii:

- Rekurencja w języku C++.
- Rekurencja w języku Java,

O tym, jak zagadnienie rekurencji wyjaśnia matematyka, przeczytasz w e-materiałach:

- Ciąg określony rekurencyjnie,
- Ciąg geometryczny określony rekurencyjnie,
- Wzór ogólny ciągu określonego rekurencyjnie,
- Ciąg arytmetyczny określony wzorem rekurencyjnym.

Twoje cele

- Przeanalizujesz rekurencyjne podejście do algorytmu Euklidesa i poznasz zalety jego stosowania.
- Zapoznasz się z różnymi implementacjami rekurencyjnego algorytmu Euklidesa.
- Wyjaśnisz, czym rekurencja różni się od iteracji.
- Rozwiążesz kilka zadań z wykorzystaniem rekurencji.

Przeczytaj

W e-materiale Algorytm Euklidesa poznaliśmy algorytm służący do znajdowania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych. Wersję iteracyjną Algorytmu Euklidesa w języku Python omówiliśmy w e-materiale Algorytm Euklidesa w języku Python. Tym razem zbadamy podejście rekurencyjne.

Algorytm Euklidesa z odejmowaniem – implementacja algorytmu w języku Python

Zaimplementujmy z użyciem rekurencji algorytm Euklidesa w języku Python.

W funkcji `NWD()`, która przyjmuje dwie zmienne, użylibyśmy instrukcji warunkowej `if`, w której warunek będzie taki sam, jak w przypadku pętli `while` w wykonaniu iteracyjnym, czyli `a != b`.

Jeżeli warunek jest spełniony, to znaczy `a != b`, funkcja będzie wywoływana rekurencyjnie. W przypadku gdy wartość `a` będzie większa od wartości `b`, funkcja zwróci `NWD(a - b, b)`, a w przeciwnym przypadku `NWD(a, b - a)`. W algorytmie korzystamy z równości `NWD(a, b) = NWD(a - b, b)` dla `a > b` lub `NWD(a, b) = NWD(a, b- a)` dla `b > a`, które pokazaliśmy w e-materiale Algorytm Euklidesa.

Jeżeli warunek nie jest spełniony, funkcja zwróci `a`. Oczywiście mogłaby też zwrócić `b` – jeżeli warunek nie zostanie spełniony, będzie to oznaczać, że wartość obu zmiennych jest identyczna.

Nasza funkcja wygląda następująco:

```
1 def NWD(a, b):
2     if a != b:
3         if a > b:
4             return NWD(a - b, b)
5         else:
6             return NWD(a, b - a)
7     return a
```

Algorytm Euklidesa z dzieleniem – implementacja algorytmu w języku Python

Zadeklarujemy funkcję `NWD()`. Przyjmie ona parametry `a` i `b`. W ciele funkcji umieścimy instrukcję warunkową `if`, której testem logicznym będzie `b != 0`. Jeżeli zależność zachodzi, funkcja zwróci samą siebie z argumentami `b` i `a % b`. W przeciwnym razie funkcja zwróci zmienną `a`. Kod wygląda następująco:

```
def NWD(a, b):
    if b != 0:
        return NWD(b, a % b)
    else:
        return a
```

Istotne jest, żeby funkcja zwróciła przypadek podstawowy w momencie, gdy `b` przyjmie wartość `0`. W innym przypadku w następnym wywołaniu funkcji pojawiłby się argument, który doprowadziłby do wykonania operacji niedozwolonej, czyli szukania reszty z dzielenia przez `0`.

Słownik

konkatenacja

łączenie ze sobą łańcuchów znaków

modulo

reszta z dzielenia dwóch liczb całkowitych, w języku Python oznaczana znakiem % (procent), np.: `22 % 5 = 2`

NWD

największy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych – największa liczba naturalna, która dzieli obie te liczby bez reszty

przypadek podstawowy

przypadek, w którym funkcja rekurencyjna zwraca konkretną wartość, a nie wywołanie samej siebie

rekurencja

technika programowania polegająca na odwoływaniu się procedur lub funkcji do samych siebie, aż do momentu spełnienia warunku podstawowego

Film samouczek

Polecenie 1

Napisz program, który obliczy element ciągu o indeksie n.

Przetestuj jego działanie dla ciągu o wzorze:

$$an = \begin{cases} 1 & \text{gdzie } n = 0 \\ a_{n-1} + r & \text{gdzie } n > 0 \end{cases}$$

gdzie $a_0 = 1$, $r = 5$, $n = 3$.

Specyfikacja problemu:

Dane:

- n – liczba naturalna
- r – liczba naturalna

Wynik:

- wyraz ciągu o indeksie n

```
1
```

```
1
```

Polecenie 2

Napisz program, który policzy największy wspólny dzielnik (NWD) wskazanych liczb.

Przetestuj jego działanie dla n = 24 oraz k = 28.

Rekurencyjny wzór na wyznaczanie NWD:

$$nwd(k,\ n) = \begin{cases} n & \text{gdzie } k = 0 \\ nwd(n\ mod\ k,\ k) & \text{gdzie } k > 0 \end{cases}$$

Specyfikacja problemu:

Dane:

- n – liczba naturalna
- k – liczba naturalna

Wynik:

- NWD liczb n oraz k

```
1
```

```
1
```

Polecenie 3

Porównaj swoje programy z przedstawionymi w filmie.

Film dostępny pod adresem /preview/resource/R19pudypm55e3

Film nawiązujący do treści materiału wprowadzenia do rekurencji, implementacja w języku Python.

Plik o rozmiarze 221.00 B w języku polskim

Polecenie 4

Zastanów się, jak wyglądałoby rozwiązanie problemu postawionego w filmie, gdyby zapisać je iteracyjnie. Jak wyglądałaby wydajność programu?

Polecenie 5

Zastanów się, jakie różnice dostrzegasz w zaprezentowanej implementacji w stosunku do tej, którą przedstawiono wcześniej.

Ważne!

W filmie mowa o tym, że dodanie poprzednich wyrazów wedle wyznaczonego wzoru jest możliwe z wykorzystaniem definicja rekurencyjnej – możemy tak zrobić w przypadku **ciągów arytmetycznych**.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wskaż poprawny zapis funkcji rekurencyjnej.

```
# funkcje rekurencyjne
```

```
def rekurencja(numer):
    return 1 if numer = 0 else rekurencja(numer-1)
```

```
def rekurencja(numer):
    wynik = 1
    for i in range(numer):
        wynik=pow(numer,2)
    return wynik
```

```
def rekurencja(numer):
    wynik = 1
    for i in range(numer):
        wynik = rekurencja(i)
    return wynik
```

Ćwiczenie 2

Napisz program, który obliczy sumę n kolejnych liczb naturalnych z użyciem rekurencji.

Specyfikacja problemu:

Dane:

- n – liczba naturalna

Wynik:

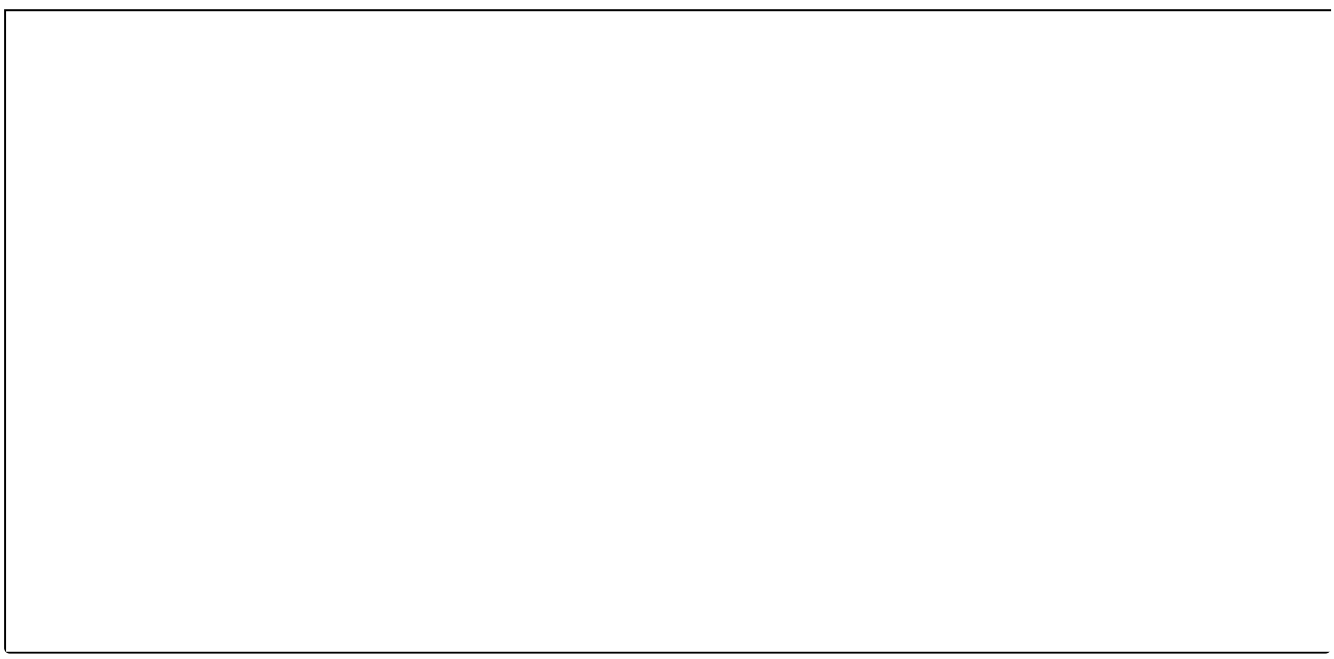
- x – liczba naturalna; suma n kolejnych liczb naturalnych

Twoje zadania

1. Zdefiniowanie funkcji `suma`.
2. Sprawdzenie, czy funkcja dla podanego parametru zwraca typ int.
3. Funkcja `suma` zwraca wartość `55` dla danych wejściowych `n = 10`.
4. Funkcja `suma` zwraca wartość `105` dla danych wejściowych `n = 14`.

```
def suma(n):
    # Tu uzupełnij kod
    return None
```

```
```



Ćwiczenie 3

Napisz program, który wygeneruje n-te słowa Thuego-Morse'a oddzielone znakiem nowej linii. Kolejne wartości n podane są w tablicy.

Słowa Thuego-Morse'a tworzone są według poniższej zasady:

$$T_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n = 0 \\ T_{n-1} \cdot \overline{T_{n-1}} & \text{gdy } n > 0 \end{cases}$$

Gdzie:

$x.y$ oznacza konkatenację słowa x ze słowem y – łączymy słowo x oraz y, przy czym słowo x występuje na pierwszej pozycji.

$\overline{a}$ oznacza negację bitów w słowie a – znaki 0 zamieniamy na 1 i odwrotnie.

Przykład:

$$T_0 = 0$$

$$T_1 = 01$$

$$T_2 = 0110$$

$$T_3 = 01101001$$

Specyfikacja problemu:

Dane:

- `tablica` – tablica liczb całkowitych

Wynik:

- x – ciąg znakow

Twoje zadania

1. Zdefiniowanie funkcji T.
2. Funkcja zwraca wartość `"0"` dla `n = 0`.
3. Funkcja zwraca wartość `"0110"` dla `n = 2`.
4. Funkcja zwraca wartość `"01101001100101101001011001101001100101100110100101101001100 10110"` dla `n = 6`.

```
def T(n):
    # Tu uzupełnij kod
    pass

tablica = [0, 2, 6]
```

```

```

Ćwiczenie 4

Napisz funkcję skracającą ułamki. Powinna przyjmować dwie liczby naturalne: `licznik` i `mianownik`, a zwracać napis będący skróconą postacią ułamka; np. dla liczb 2 i 4 funkcja powinna zwrócić `1/2`.

Specyfikacja problemu:

Dane:

- `licznik` – liczba całkowita
- `mianownik` – liczba całkowita

Wynik:

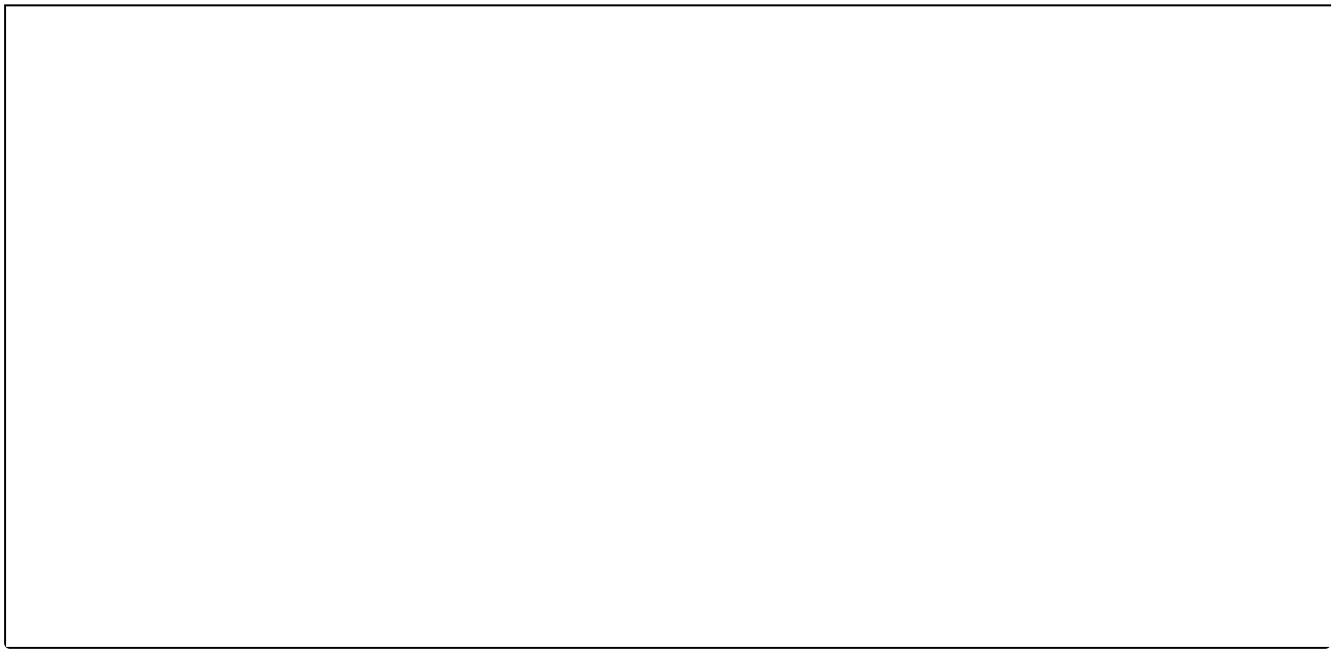
Program na wyjściu standardowym zwróci skrócony ułamek.

Twoje zadania

1. Zdefiniowanie funkcji `skroc_ulamek`.
2. Funkcja zwraca napis `"1/3"` dla wartości 3 oraz 9.
3. Funkcja zwraca napis `"1/6"` dla wartości 6 oraz 36.

```
def skroc_ulamek(licznik, mianownik):
    # Tu uzupełnij kod
    pass
```

```
1
```



Dla nauczyciela

Autor: Adam Jurkiewicz
Przedmiot: Informatyka

Temat: Rekurencja w języku Python

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) objaśnia, a także porównuje podstawowe metody i techniki algorytmiczne oraz struktury danych, wykorzystując przy tym przykłady problemów i algorytmów, w szczególności:

b) rekurencję (do generowania ciągów liczb, potęgowania, sortowania liczb, generowania fraktali),

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Przeanalizujesz rekurencyjne podejście do algorytmu Euklidesa i poznasz zalety jego stosowania.
- Zapoznasz się z różnymi implementacjami rekurencyjnego algorytmu Euklidesa.
- Wyjaśnisz, czym rekurencja różni się od iteracji.
- Rozwiążesz kilka zadań z wykorzystaniem rekurencji.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimedium i ćwiczeń interaktywnych;
- ćwiczenia praktyczne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- oprogramowanie dla języka Python 3 (lub nowszej wersji), w tym PyCharm lub IDLE.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Rekurencja w języku Python". Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Wyświetlenie przez nauczyciela tematu i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. **Rozpoznanie wiedzy uczniów.** Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Uczniowie analizują przykład z sekcji „Przeczytaj” i testują zaprezentowane rozwiązania na swoim komputerze.
2. **Praca z multimedium.** Uczniowie wspólnie zapoznają się z treścią i filmem umieszczonym w sekcji „Film samouczek”. Następnie indywidualnie przechodzą do wykonywania poleceń: 1, 3 i 5. W kolejnym kroku przedstawiają swoje rezultaty osobie z ławki. W przypadku wątpliwości i trudności przy rozwiązywaniu zadania nauczyciel omawia je na forum klasy.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia nr 1–3, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną osobą.

Faza podsumowująca:

1. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia z programowania w Pythonie, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie szukają problemów matematycznych i informatycznych, w których wykorzystanie rekurencji może być przydatne.

Materiały pomocnicze:

- Oficjalna dokumentacja techniczna dla języka Python 3 (lub nowszej wersji).
- Oficjalna dokumentacja techniczna dla oprogramowania PyCharm lub IDLE.

Wskazówki metodyczne:

- Uczniowie mogą wykorzystać treści w sekcjach: „Przeczytaj”, „Film samouczek”, „Sprawdź się” jako materiał do lekcji powtórkowej.